

DOI: 10.13476/j.cnki.nsbdtqk.20180003

于忱,陈隽,王红瑞,等.多变量 Copula 函数在干旱风险分析中的应用进展[J].南水北调与水利科技,2018,16(1):14-21. YU C, CHEN J, WANG H R, et al. Application progress of multi variable Copula function in drought risk analysis[J]. South to North Water Transfers and Water Science & Technology, 2018, 16(1): 14-21. (in Chinese)

# 多变量 Copula 函数在干旱风险分析中的应用进展

于忱<sup>1</sup>, 陈隽<sup>2</sup>, 王红瑞<sup>1</sup>, 朱中凡<sup>1</sup>, 来文立<sup>1</sup>

(1. 北京师范大学 水科学研究院, 北京 100875, 2. 环境保护部 华南环境科学研究所, 广州 510655)

**摘要:** Copula 是一种构造多元联合分布和分析随机变量间相关结构的重要工具。对 2005 年以来国内外学者对 Copula 在干旱领域的研究和应用进行了综述, 阐述了当前 Copula 方法存在的问题和继续研究方向。首先, 高维 Copula 函数的参数估计不够精确, 虽然高维 Copula 构造方法如嵌套法、混合法、条件混合法等对参数估计有本质上的简化作用、基于 Bayesian 理论的 Copula 参数估计方法比传统方法有明显改进, 但在计算量、置信水平、样本量等需求上仍存在取舍, 高维 Copula 理论的参数估计方法仍是 Copula 理论研究中的难点; 其次, 干旱特征对时间具有较强敏感性, 使得 Copula 函数应用于干旱问题需要具有时变性, 时变和空间变化 Copula 理论能综合时空维度对干旱进行全面分析, 这将是未来 Copula 研究的方向之一; 最后, Copula 方法能应用于诸多方向, 还需要更加发散地将 Copula 方法与其他框架相结合。

**关键词:** 干旱; Copula; 多变量分析

**中图分类号:** P333.9    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1672-1683(2018)01-0014-08

## Application progress of multi variable Copula function in drought risk analysis

YU Chen<sup>1</sup>, CHEN Juan<sup>2</sup>, WANG Hongrui<sup>1</sup>, ZHU Zhongfan<sup>1</sup>, LAI Wenli<sup>1</sup>

(1. College of Water Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. South China Institute of Environmental Sciences, Ministry of Environmental Protection, Guangzhou 510655, China)

**Abstract:** Copula is an important tool for structuring the multivariate joint distribution and analyzing the correlation structure between random variables. This paper reviews the research and application of Copula in drought since 2005 and discusses the current problems of Copula method and the development direction of Copula theory. Firstly, the parameter estimation of high dimensional Copula function is not accurate enough. Although the high dimensional Copula construction methods such as nested method, hybrid method, and condition hybrid method can essentially simplify parameter estimation, and the Copula parameter estimation method based on Bayesian theory is a significant improvement over the traditional method, still they cannot deliver satisfactory computation amount, confidence level, and sample size at the same time. The parameter estimation method of high dimensional Copula theory is still a difficult point in the research of Copula theory. Secondly, the characteristics of drought are sensitive to time; thus, the Copula function needs to be time varying in order to be applied to drought problems. The Copula theory with temporal and spatial variation can be used to analyze drought. It is one of the future directions of Copula research. Thirdly, Copula method can be applied in a number of directions, and also need to be further combined with other frameworks.

**Key words:** drought; Copula; multivariable analysis

收稿日期: 2017-07-22    修回日期: 2017-11-30    网络出版时间: 2017-12-26  
网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/13.1334.TV.20171226.0956.002.html>  
基金项目: 国家自然科学基金(51479003; 51279006)

**Fund:** National Natural Science Foundation of China(51479003; 51279006)

**作者简介:** 于忱(1990), 女, 山东人, 主要从事水文过程不确定性分析方面研究。E-mail: nihaoyuchen@163.com

**通讯作者:** 陈隽(1967), 男, 山西太原人, 高级工程师, 主要从事水资源水环境方面研究。E-mail: chenjun@scies.org

## 1 基本概念

### 1.1 Copula 函数

Copula 最早由 Schweizer 和 Sklar<sup>[1]</sup> 于 1959 年提出,之后 Nelson<sup>[2]</sup> 对其进行了发展,系统地总结了 Copula 的定义及 Copula 理论的基础,使 Copula 成为构造多元联合分布和分析随机变量间相关结构的重要工具。Copula 方法作为一种常用的、较简易的多变量分析方法,能较好的对干旱问题中的多特征量进行多元拟合,并对多变量系统进行条件概率分析、重现期分析等。

宋松柏等人<sup>[3]</sup>对 Copula 函数的定义为:一个  $d$  维 Copula 是  $[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  的映射,满足要求:

(1) 设  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_d]$ ,  $u_i \in [0, 1]$ , 对于任意  $i \leq d$ , 若  $\mathbf{u}$  中至少一个分量为 0, 即  $u_i = 0$ , 有  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ ;

(2) 除  $u_i$  外,  $\mathbf{u}$  中其他分量都为 1, 则  $C(1, \dots, u_i, \dots, 1) = u_i$ ;

(3)  $C(u_1, \dots, u_d)$  满足边界  $0 \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq 1$ ;

(4)  $C(u_1, \dots, u_d)$  是一个  $d$  维增函数, 对于任意  $d$  维区间,  $C(u_1, \dots, u_d)$  非负。

Copula 函数种类很多,其常用的有:对称与非对称 Archimedean Copula、meta-elliptic Copula、Plackett Copula 等。

Copula 函数在 20 世纪 90 年代末广泛应用到金融等领域,在水文方面的应用研究起步较晚,但无可争议, Copula 方法逐渐成为分析多变量事件的一件利器。在干旱领域主要针对径流干旱问题对干旱的三个主要特征量进行拟合。

其中 Archimedean Copula 在水文中的应用最为广泛。对称 Archimedean Copula 是由一个生成函数  $\Psi(\cdot)$  生成的 Copula 函数。它具有其他 Copula 函数不具备的优点,比如形式简单、有可结合性和对称性等。那么从它的构造特点出发,可以较为容易的得到众多相关的性质。Archimedean Copula 有许多类型,其中常用的有 Clayton Copula、Gumbel-Hougaard Copula、Ali-Mikhail-Haq Copula、Frank Copula 等。

在 Archimedean Copula 中,利用 Copula 函数完全嵌套和部分嵌套等嵌套方法,利用低维 Archimedean Copula 函数生成高维 Copula 函数,可以在一定程度上的解决高维 Copula 函数参数过于复杂的难点。

### 1.2 干旱事件

干旱是一种极端气候事件<sup>[4]</sup>,对于干旱尚没有统一的定义,从气象干旱的角度,干旱是指在某一时

段内降水量(或降水量减去蒸发量)明显比多年平均量偏少的现象<sup>[5]</sup>。

干旱的形成机理非常复杂,其发生多由降水量缺乏引起<sup>[6]</sup>。对各种类型干旱的诊断、评价、预测,均借助于各种干旱指标和人为定义的干旱指数来计算<sup>[7,8]</sup>。

气象干旱主要以降水量(或降水量减去蒸发量)为研究对象,是包括干旱历时、干旱烈度、干旱强度等相互联系的特征变量的水文事件。目前,国内外对于干旱事件的识别大多采用 1967 年由 Yevjevich 提出<sup>[9]</sup>的游程理论(Run Theory)。游程理论也叫轮次理论,是时间序列分析的一种方法。游程理论是指在连续出现的同类事件中,在它的前后是另外一类事件,可以将年降雨资料视为离散序列,如丰枯交替出现等。为在实际研究中,按丰枯划分标准分析丰水年、枯水年,并统计连丰、连枯出现的频次,进一步根据游程理论计算各观测站点连续多水和少水的概率,可以对当前的水文环境进行有效监测,对提前采取预防措施并减小风险事件造成的损失有着重要的作用。如图 1 所示,纵轴  $x$  表示降水量,横轴  $t$  表示时间轴,那么干旱历时  $T$  即为图中所示阴影部分在  $t$  轴上的投影长度;干旱烈度为阴影部分面积  $S$ ;干旱烈度峰值为图中  $I_{\max}$  所标识长度;干旱强度  $M$  为干旱烈度  $S$  与干旱历时  $T$  的比值,即  $M = \frac{S}{T}$ 。

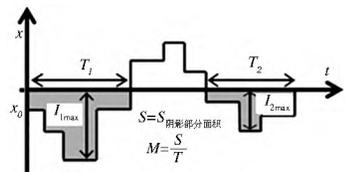


图 1 游程理论示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Run Theory

## 2 Copula 研究进展

考虑到干旱是一个多变量综合的水文事件,事实上干旱历时、干旱烈度等特征值之间通常都具有较高的相依性,所以仅采用单变量的概率分布只能片面的分析单一特征值的变化规律。国内外学者逐渐将发源于金融领域并且十分流行的 Copula 方法引入到水文领域,尤其在干旱事件的多变量分析中得到广泛的应用。目前的分析不只局限于二元变量的分析,向多元变量 Copula 的深入拓展和应用为干旱分析提供了重要的方法。

### 2.1 2013 年之前 Copula 模型的应用研究

#### 2.1.1 二元 Copula 模型

Copula 方法在引入干旱领域初期,主要以多元分析的便利性而获得国内外众多学者的关注。但是

高维 Copula 方法的参数估计方法是一个复杂而困难的问题, 于是二维 Copula 作为最基础的分析模型在较早的时期被应用在干旱领域的众多方面, 主要集中在对干旱特征值的二元分析上。

2006 年, Zhang 等人<sup>[10]</sup> 对干旱问题进行了二维 Copula 分析, 对伊朗西北部的 Sharafkhaneh 雨量站数据进行了干旱特征分析, 干旱历时和干旱烈度表现显著相关性, 且符合不同的分布模型, 故而采用多种 Copula 函数构建了联合分布模型, 选取了最佳的拟合优度的 Copula 函数, 根据误差分析和尾部相关系数确定采用了 Galambos Copula 函数。Shiau<sup>[11]</sup> 对干旱历时和干旱烈度的二维 Copula 模型进行了分析, 采用 IFM 方法来构造 Copula 函数, 并且对台湾进行了分析, 选取的 Copula 拟合产生了理想的结果, 并且进行了基于重现期和联合概率的旱情分析。Shiau 等人<sup>[12-13]</sup> 运用 6 种 Archimedean Copulas 函数构建了干旱历时和干旱烈度的联合概率分布, 并且次年利用 Copula 方法构建了边缘分布为混合指数分布和伽马分布的干旱历时、干旱强度的二维 Copula 函数。袁超<sup>[14]</sup> 对渭河流域干旱历时和干旱烈度进行了联合概率分布的拟合, 对多种 Copula 函数进行了筛选, 最后选取 Frank Copula 函数作为干旱双变量联合概率分布函数模型, 并计算了其联合重现期、对干旱历时和烈度的尾部相关性进行了估计, 为干旱灾害的风险管理提供了理论基础。Song 和 Singh<sup>[15]</sup> 采用 5 种 Metreliptical Copulas 函数构建了干旱历时、烈度、间隔的两两间的联合概率分布, 并且与几种常用的 Archimedean Copulas 函数进行了比较分析。Shiau 等人<sup>[16]</sup> 采用伊朗阿巴丹和安扎里地区的降水数据, 将干旱历时、干旱烈度进行了 Copula 分析, 用以分析干旱频率及复发间隔, 得到“湿润地区如果存在较大的降雨量波动, 则干旱程度可能更加严重”的重要结论。陆桂华<sup>[17]</sup> 对重庆市 1958 至 2007 年的气候数据进行分析, 综合分析重庆 2006 年干旱问题, 采用了 Gumbel Hougard Copula 函数对干旱历时和干旱强度进行拟合和重现期计算, 该文并没有对不同 Copula 函数进行择优和拟合检验。同年, 许月萍<sup>[18]</sup> 加入了拟合检验, 采用浙江省钱塘江流域的年降雨量数据, 使用自回归马尔科夫模型延长水文干旱数据, 解决了干旱数据短少的问题, 又利用 Clayton Copula 函数对干旱历时和干旱烈度进行了二元联合分布的计算, 在此研究中, 利用自助抽样法计算了 K-S 统计量以检验 Copula 函数的拟合优度, 检验得出 Clayton Copula 函数的适用性较好。张雨<sup>[19]</sup> 对渭河流域的西安站

测量数据进行了更全面的分析: 干旱历时、干旱烈度、干旱烈度峰值进行了两两相关性度量, 采用 OLS 方法筛选了七种 Copula 函数的拟合优度, 选择 Plackett Copula 对干旱历时和烈度以及干旱历时和烈度峰值、Clayton Copula 函数对干旱烈度和峰值进行联合分布计算, 并计算其干旱重现期。Mirabbasi 等人<sup>[20]</sup> 对伊朗西北部的 Sharafkhaneh 雨量站信息进行了二维 Copula 分析, 同样从干旱烈度和历时进行分析。Ganguli 等人<sup>[21]</sup> 对印度地区的干旱事件进行了阿基米德 Copula 拟合, 这考虑到了干旱变量在尾端的极端性, 在判断拟合优度后选择 Gumbel Hougard Copula 建模, 对传统的双变量分布(二元对数正态分布等)与 Copula 联合分布进行了比较, 指出基于 Copula 的分布拟合性能更好。另外, 他们<sup>[22]</sup> 还对美国德克萨斯州的月降水资料进行了分析, 采用 AIC 准则进行择优。

Copula 模型早期主要被应用在对干旱特征值的二元分析上, 干旱历时和干旱烈度的联合概率分布应用最广。不同的学者将各种其他方法与之融合, 结合不同的方法和选取不同的干旱指标和组合方式进行了大量的尝试性应用, 对 Copula 方法在干旱领域的研究起到了极大的推动作用。

### 2.1.2 多元 Copula 模型

多元 Copula 模型被应用于干旱问题的多特征分析中, 开始了 Copula 理论从二维向高维化拓展的步伐。

2009 年, Serinaldi 等人<sup>[23]</sup> 对西西里岛的降水指数进行了干旱历时、平均和最小 SPI 值、平均干旱范围的四维 Copula 分析, 结果显示在 Copula 方法下的理论联合重现期的计算是符合经验重现期的, 表明了 Copula 函数足以模拟干旱特点和条件概率。Song 等人<sup>[24]</sup> 对二元、三元 Plackett Copula 进行了分析, 采用矩量法(MOM)、最大似然估计(MLM)、概率加权矩(PWM)、遗传算法(GA)进行估计单变量分布的参数, 采用 log-pseudolikelihood 函数估计法(LPLF)和 GA 算法进行估计二元和三元 Copula 参数, 在泰安、田阳、庄头的流量站得到应用。曾智等人<sup>[25]</sup> 对渭河流域华阴站降雨资料进行分析, 采用 RMSE、AIC、BIC 作为拟合优度检验标准, 选取 Frank 和 Gaussian Copula 进行二维数据拟合, 构建 Frank Copula、Gaussian Copula、M3 Copula 对比分析了三维干旱联合特征。2011 年, 宋松柏等人<sup>[26]</sup> 严格推导了 5 种常用的三维非对称 Archimedean Copula 函数的条件 Copula 及其密度函数, 以渭河流域径流序列分析计算了北洛河状头站 3 维水文

干旱变量组合的联合概率、条件概率和相应的重现期。于艺等人<sup>[27]</sup>利用渭河流域西安气象站的数据对干旱历时、干旱烈度、烈度峰值进行了三维 Copula 拟合,通过 RMSE、AIC 及 Bias 评价对 M5、M6、M12 非对称 Archimedean Copula 函数进行了拟合优度检测,通过对比对称性和非对称 Archimedean Copula,表明后者克服了前者只能描述变量之间相关系数很接近的局限性,对高维非对称 Archimedean Copula 参数的估计方法还有待改进。李计等人<sup>[28-29]</sup>基于四种对称 Archimedean Copula 和五种非对称 Archimedean Copula 构建了新疆乌鲁木齐和石河子气象站数据的二维、三维干旱变量的联合分布,利用上述函数分析了黑河流域三个水文站的干旱情况。肖名忠等人<sup>[30]</sup>利用三变量 Plackett Copula 函数对东江流域的三个水文站数据进行了联合概率分布、条件概率分析、联合重现期的分析计算。陈永勤等人<sup>[31]</sup>用 OLS 方法从 Gumbel Hougard、Frank、Clayton Copula 中选择 Gumbel Hougard Copula 对潘阳湖流域的干旱历时和干旱烈度进行联合分布的分析,并计算了联合重现期 and 同现重现期。张强等人<sup>[32]</sup>同样利用单参数 Archimedean Copula 函数中的 Gumbel Hougard Copula 对塔河流域的四个站点的数据进行了两两计算,

对联合重现期和同现重现期进行了分析。陈子燊等人<sup>[33]</sup>在 2013 年也采用 Gumbel Hougard Copula 对西江下游马口水文站的干旱历时和干旱强度进行了分析,对特定的干旱历时和干旱强度之间的遭遇概率进行了诊断和预测。Yusof 等人<sup>[34]</sup>对马来西亚半岛的雨量站的逐日资料识别并分析了干旱强度和干旱历时的边缘分布和联合 Copula 分布,利用 AIC 准则选择了合适的 Copula 函数,并且对条件概率、干旱重现期进行了进一步分析,全面地分析了地区抗旱性能。Wan 等人<sup>[35]</sup>也对马来西亚半岛的长期干旱状况进行了分析,利用空间分析来说明干旱和极度干旱的比例,用 AIC 准则对 Copula 函数进行择优,对干旱烈度和持续时间进行了模拟。2014 年,Reddy 等人<sup>[36]</sup>对美国德克萨斯州的干旱地区进行了干旱烈度、历时的 Copula 建模,分析了 Plackett 和 Student's t Copula 并进行拟合优度的比较,介绍了两种启发式算法的实用工具进行 Copula 参数的估计。

## 2.2 2014 年之后的 Copula 模型的应用研究

2014 年之后国内外学者对 Copula 的研究应用在更为发散的领域,不仅是干旱特征值的联合概率分布,还应用于空间分布、风险评价等领域,取得了大量的研究成果,其主要研究内容总结如表 1 所示。

表 1 近年 Copula 研究进展

Tab. 1 Research progress of Copula in recent years

年份	学者	简介
	左冬冬等 <sup>[37]</sup>	研究了中国西南地区干旱指标的二维 Copula 模型对样本量的敏感度,发现分布参数的稳定对样本量的需求较大、不同参数的需求不一致,但联合重现期对样本量不敏感。
	刘晓云等 <sup>[38]</sup>	从五类 Copula 中选择 Frank Copula 研究中国南方干旱事件的条件概率以及重现期,表明干旱严重程度的条件分布与历时的阈值呈正相关,并且受灾状况的条件重现期与干旱时长成正比例。并依此划分了中国南部的干旱风险程度。
2015	潘瑾琳等 <sup>[39]</sup>	利用 GH Copula 推求联合重现期以及重现期的设计值,求得了各干旱历时或者各干旱程度下的条件重现期。
国内	崔刚等 <sup>[40]</sup>	基于二维 Copula 模型表明短期干旱的干旱事件的重现期主要受到干旱强度的影响,并且与干旱强度形成正相关;同时干旱强度一定时,重现期随干旱历时增加而明显增加。
	张静等 <sup>[41]</sup>	利用 Clayton Copula 构建季度间连干旱模型,利用危险度评估模型给出川西南地区遭遇季节连旱的危险程度评估,指出相邻季节为重旱时连旱危险度最小,偏旱时最高。
	关帅等 <sup>[42]</sup>	将 Copula 方法应用在旱涝组合事件的研究中,发现 Copula 可以很好地描述季节连旱、连涝的组合事件概率。
	李天水等 <sup>[43]</sup>	基于 Gumbel Copula 进行都江堰站的干旱风险评估。
2016	钱龙霞等 <sup>[44]</sup>	首次建立了基于 Copula 函数的水资源供需风险损失模型。
	任璐等 <sup>[45]</sup>	选取了四种分布函数用于拟合干旱特征变量,最后利用 Copula 函数分析得出干旱历时与干旱烈度峰值、干旱烈度与干旱烈度峰值的单变量重现期与二维重现期差距较大。
2014	Zhang et al. <sup>[46]</sup>	Copula 与 Morlet 小波相结合,在流域上评估其旱涝风险,利用 Copula 计算两个典型场景下的联合重现期。
	Liu et al. <sup>[47]</sup>	利用 Gumbel 和 Clayton Copula 分别构建了干旱特征值的二元和三元的联合分布,表明重现期有赖于空间位置、变量类型和变量组合方式,极端的干旱情况和三元变量分析得到的重现期更长,达到了 42.1 年。
	Abdi et al. <sup>[48]</sup>	指出 Copula 的应用使得对水文现象的多变量频率分析更加精确,并且给出了一种基于 OBM 的 Copula 参数估计方法,利用伊朗的雨量数据证明了该方法的优秀性。
国外	2015 Salvadori et al. <sup>[49]</sup>	对蒲河流域的五条主要支流进行了重现期分析,提供了有价值的实时的多元干旱评估方式。
	Vergni et al. <sup>[50]</sup>	将 Copula 理论用于农业干旱,对一种向日葵作物进行了发病率和严重程度的二元分析,为干旱的规划和管理提供了一个条件化的解决方案。
	Zhang et al. <sup>[51]</sup>	利用 Gumbel Copula 函数分析干旱联合重现期在空间上的分布,研究表明云南省中部地区和东北部地区具有较高的干旱风险,而西北部地区的干旱风险相对较低。
2016	Xu et al. <sup>[52]</sup>	将三维 Copula 函数应用到多变量频域分析,通过干旱频率分析抗旱规划和干旱风险管理。

### 3 Copula 理论发展分析

#### 3.1 2013 年之前的 Copula 模型及其存在的问题

早期 Copula 刚刚引入,学者们对其进行了广泛尝试,注意到 Copula 在多变量分析中的便利性,并将其在干旱领域深入发展。到中期 Copula 逐渐成为一种多变量干旱分析的理论体系和应用框架,利用 Copula 方法对干旱事件进行分析逐渐形成模式,一般分析流程如图 2 所示。

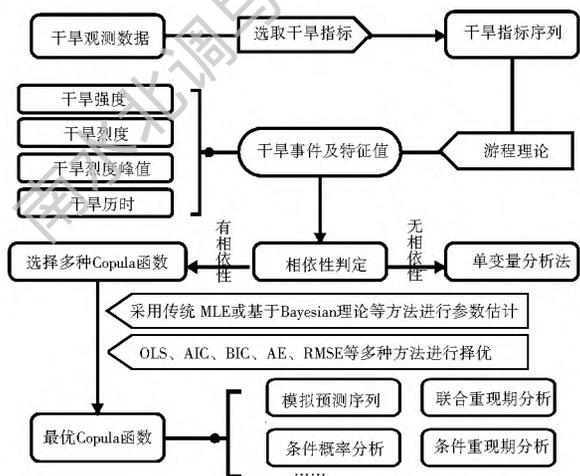


图 2 Copula 模型研究方法流程

Fig. 2 Flow chart of research method of Copula model

随着 Copula 方法逐渐流行,其弊端也逐渐显示出来:一方面, Copula 能有效联合二元随机变量进行二元分析,但其高维情况存在难点,高维 Copula 函数参数难以进行估计、多参数 Copula 的高维参数空间估计准确性差等;另一方面,相比于在金融领域具有多变量时间序列分析、金融市场相关性分析、组合风险设计等诸多应用,干旱领域中 Copula 仅作为一种联合分布的构建方法没有充分发挥 Copula 的能力。

众多学者不再局限于二维 Copula 模型的构建,而把眼光放在高维分析上,对干旱的多特征值进行全面性的分析。一方面借助  $n$  元 Copula 函数直接估计其参数从而得到高维联合分布,例如常用的单参数  $n$  元 Archimedean Copula 如下。

(1) Clayton Copula。表达式为  $C(x) = (\sum_{i=1}^n x_i^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$  (生成元为  $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$ ),它对变量分布的下尾部变化十分敏感。

(2) Frank Copula。表达式为  $C(x) = -\frac{1}{\theta} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\prod_{i=1}^n (\exp(-\theta x_i) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right]$  (生成元为  $\varphi(t) = -\ln \frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}$ ),它具有对称性,对尾部变化不敏感。

(3) Gumbel Copula。表达式为  $C(x) = \exp(-(\sum_{i=1}^n -\ln x_i)^{\theta})^{1/\theta}$  (生成元为  $\varphi(t) = (-\ln t)^{-1/\theta}$ ),它对上尾的变化十分敏感。

另一方面借助嵌套 Copula 和混合 Copula 方法构造高维 Copula。

对  $X, Y, Z$  这三个维度的随机变量,利用嵌套 Copula 方法构造其联合分布可以表示为  $C(x, y, z) = C_1[C_2(x, y), z]$ ,其中  $C_2$  是  $X, Y$  的联合分布 Copula 函数、 $C_1$  是  $C_2$  与  $Z$  的联合分布 Copula 函数;利用混合 Copula 方法构造其联合分布可以表示为:  $C(x, y, z) = \omega_1 C_1(x, z) + \omega_2 C_2(x, y) + \omega_3 C_3(y, z)$ ,其中  $C_1, C_2, C_3$  可以是不同类型的 Copula 函数,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  为其权重。

嵌套 Copula 和混合 Copula 方法的每一步都是对二元 Copula 进行参数估计,避免了直接对多元 Copula 进行参数估计的难点,并且由于各类二元 Copula 都能被其所使用,种类变化繁多,能达到较好的拟合效果。

也有学者利用其他统计学理论提出不同的高维 Copula 构造方法,如条件混合法:

令三变量  $X, Y, Z$  的联合分布表达式为

$$F_{XYZ}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{XZ}[F_{XY}(x|y), F_{ZY}(z|y)] F_Y(dy) \quad (1)$$

式中:  $C$  为二维 Copula 函数;  $F_{XY}(x|y)$ 、 $F_{ZY}(z|y)$  分别为  $y$  已知的条件下  $X$ 、 $Z$  的条件分布。  $F_{XY}(x|y)$  表示为:

$$F_{XY}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \frac{\partial C_{XY}[F_X(x), F_Y(y)]}{\partial F_Y(y)} \quad (2)$$

式中:  $F_X(x)$ 、 $F_Y(y)$  分别为随机变量  $X$ 、 $Y$  的边缘分布函数。

各类高维 Copula 的构造方法的本质目的都是为了简化 Copula 模型的参数估计难度和提高准确程度。

学者们对其更深入的研究使得 Copula 更深的渗透到干旱分析的理论中去。

#### 3.2 2014 年之后的 Copula 理论存在的问题及其发展方向

2014 年后,随着 Copula 模型的成熟, Copula 理论随着应用面增大而发挥巨大作用,高维 Copula 参数估计难度的问题也愈发突出。

一方面, Copula 理论的易用性在近期得到充分展现,国内外学者对 Copula 在干旱领域的研究和应用呈现出一种发散的态势。 Copula 的应用开始与各类干旱分析框架相结合,被应用在各个传统的干

旱分析方法上,例如干旱强度、干旱烈度、干旱历时的多变量联合重现期分析、包括样本量在内的多变量敏感性分析、旱涝组合风险评估机制的构建等。

另一方面, Copula 理论的研究是以高维 Copula 函数及其参数估计方法展开的。

有学者对 Copula 参数估计方法、Copula 择优方法提出了改进:利用 Bayesian 理论对参数估计方法的改进最具代表性,与传统 MLE 方法相比有明显的优化;利用 OLS、AIC、BIC、AE、RMSE 等各种指标对 Copula 进行择优,更多的 Copula 函数被使用、更多的指标对其进行选择,这使得 Copula 方法逐渐从一种新兴方法转变为一类成熟理论框架。

部分学者提出了诸多高维 Copula 构造方法,以简化模型中参数的估计难度、提高参数估计的精度。常用的方法有 Copula 嵌套法、Copula 混合法、条件混合法等。

但高维 Copula 拟合时的参数估计方法仍是一个困难的、复杂的问题。虽然众多学者提出了许多改进的参数估计方法,但仍不免是侧重单方面的方法,在提高精度的同时牺牲计算量的限制、在提高效率的同时也会增加估计的置信区间大小。

以 Archimedean Copula 函数族为例,一方面高维对称 Archimedean Copula 函数因其对称性而简化了参数估计的步骤,但也因为对称性而产生较大的局限;另一方面混合型 Archimedean Copula 将高维函数的参数估计拆分为多个二维或三维的 Copula 参数估计,降低了参数估计的计算量,但混合效果存在精度不足、拟合效果较差的缺点。

目前尚没有研究提出一个普适的、精确的方法,以应对多种类型的 Copula 函数。

高维 Copula 理论的最紧密、最具有代表性的应用方向是综合时空变化的 Copula 函数。以时变 Copula 为例:

给定两变量的水文序列  $(y_1, y_2)_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 采用二维 Copula 函数构造联合分布

$$H_{Y_1, Y_2}(y_1', y_2') = C[F_1(y_1' | \theta_1), F_2(y_2' | \theta_2) | \theta] \quad (3)$$

式中:  $H_{Y_1, Y_2}$  表示  $(y_1, y_2)$  的联合分布;  $C$  表示二维 Copula 函数;  $F_1, F_2$  分别为  $y_1, y_2$  的累积概率函数,  $\theta_1, \theta_2$  为时变的边缘分布参数向量;  $\theta$  为时变的 Copula 相关性参数。

时变 Copula 函数需要考虑两方面的时变性:一是边缘分布的时变性,表现在单个水文变量统计参数的时变性;二是水文变量间的相关结构的时变性,体现在 Copula 相关性参数的时变性上。实际上,前者的时变特性只体现在参数从常量变化为关于时间

的变量,为变参数提供参数估计方法更要考虑到变参数的分析性质,因而为其增加了难度;后者相对而言要更加困难,水文变量间的相关结构的变化势必影响到 Copula 函数类型的选择,如何使得综合模型能根据时间变化而贴合不同 Copula 函数的特点,将是一大难题。

综合时空变化的 Copula 函数能够综合分析时间和空间对干旱特征值的影响规律,得到科学实用的结论。目前时变 Copula 方法尚未有过多的研究,在未来是 Copula 研究的一个新方向。

## 4 结语

自 Copula 函数引入干旱领域以来,有许多学者对其进行研究和探讨,在干旱多特征、多变量事件分析中取得大量成果和进展。

逐渐成熟的 Copula 理论和 Copula 方法为干旱领域的多元分析提供了一个强大的工具,并具有扎实的理论基础和很强的可结合性。未来, Copula 将转化为干旱领域连结各个不同方向的工具。

以下三点值得未来学者进一步研究:

- (1) 对 Copula 理论的探究集中在高维 Copula 理论(主要是参数估计方法)的研究;
- (2) 对 Copula 函数的时变性探究集中在综合时间空间维度对 Copula 的影响的研究;
- (3) 对 Copula 模型的应用广度的探索集中在低维 Copula 方法在诸多方向上的应用。

## 参考文献(References):

- [1] SKLAR M. Fonctions de r partition n dimensions et leurs marges[J]. Publ. inst. statist. univ. paris, 1960, 8: 229-231.
- [2] NELSEN R B. An introduction to copulas. Lecture Notes in Statistics[J]. Optimal Mixture Experiments, 1998, 36(3).
- [3] 宋松柏. Copulas 函数及其在水文中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (SONG S B. Copulas function and its application in hydrology[M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))
- [4] HEIM R R. A review of twentieth century drought indices used in the United States. [J]. Bull. Amer. Meteor. Soc, 2002, 83(8): 1149-1165. DOI: 10.1175/1520-0477(2002)083<1149:AROTDI>2.3.CO;2.
- [5] MISHRA A K, SINGH V P. A review of drought concepts[J]. Journal of Hydrology, 2010, 391(F2): 202-216. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2010.07.012.
- [6] ANDREADIS K M, LETTENMAIER D P. Trends in 20th century drought over the continental United States[J]. Geophysical Research Letters, 2006, 33(10): 10-29. DOI: 10.1029/2006GL025711.
- [7] LLOYD-HUGHES B, SAUNDERS M A. A drought climatology for Europe[J]. International Journal of Climatology, 2002,

- 22(13): 1571-1592. DOI: 10. 1002/ joc. 846.
- [ 8 ] HUNT E D, HUBBARD K G, WILHITE D A, et al. The development and evaluation of a soil moisture index[ J ]. International Journal of Climatology, 2009, 29( 5 ): 747-759. DOI: 10. 1002/ joc. 1749.
- [ 9 ] YEVJEVICH V. An objective approach to definitions and investigations of continental hydrologic droughts[ J ]. 1967. DOI: 10. 1016/ 0022-1694( 69) 90110-3.
- [ 10 ] SINGH V P, ZHANG L. Bivariate flood frequency analysis using the copula method[ J ]. Journal of Hydrologic Engineering, 2006, 11( 2 ): 150-164. DOI: 10. 1061/ ( ASCE) 1084-0699( 2006) 11: 2( 150)
- [ 11 ] SHIAU J T. Fitting Drought duration and severity with two dimensional copulas[ J ]. Water Resources Management, 2006, 20( 5 ): 795-815. DOI: 10. 1007/ s11269-005-9008-9.
- [ 12 ] SHIAU J T, FENG S, NADARAJAH S. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas[ J ]. Hydrological Processes, 2007, 21( 16 ): 2157-2163. DOI: 10. 1002/ hyp. 6400.
- [ 13 ] SHIAU J T, MODARRES R. Copula based drought severity-duration frequency analysis in Iran[ J ]. Meteorological Applications, 2009, 16( 4 ): 481-489. DOI: 10. 1002/ met. 145.
- [ 14 ] 袁超. 渭河流域主要河流水文干旱特性研究[ D ]. 杨凌: 西北农林科技大学, 2008. ( YUAN C. Study on hydrological drought characteristics of main rivers in Weihe River Basin [ D ]. Yangling: Northwest Agriculture and Forestry University, 2008. ( in Chinese ) )
- [ 15 ] SONG S, SINGH V P. Meta-elliptical copulas for drought frequency analysis of periodic hydrologic data[ J ]. Stochastic Environmental Research & Risk Assessment, 2010, 24( 3 ): 425-444. DOI: 10. 1007/ s00477-009-0331-1
- [ 16 ] SHIAU J T, MODARRES R. Copula based drought severity-duration frequency analysis in Iran[ J ]. Meteorological Applications, 2009, 16( 4 ): 481-489. DOI: 10. 1002/ met. 145.
- [ 17 ] 陆桂华, 闫桂霞, 吴志勇, 等. 基于 copula 函数的区域干旱分析方法[ J ]. 水科学进展, 2010, 21( 2 ): 188-193. ( LU G H, YAN G X, WU Z Y, et al. Analysis method in water science, [ J ]. Advances in Water Science, 2010, 21( 2 ): 188-193. ( in Chinese ) )
- [ 18 ] 许月萍, 张庆庆, 楼章华, 等. 基于 Copula 方法的干旱历时和烈度的联合概率分析[ J ]. 天津大学学报( 自然科学与工程技术版), 2010, 43( 10 ): 928-932. ( XU Y P, ZHANG Q Q, LOU Z H, et al. Joint probability analysis of drought duration and intensity based on[ J ]. method Copula Journal of Tianjin University( Natural Science and Engineering Technology ), 2010, 43( 10 ): 928-932. ( in Chinese ) ) DOI: 10. 3969/ j. issn. 0493-2137. 2010. 10. 014.
- [ 19 ] 张雨, 宋松柏. Copulas 函数在多变量干旱联合分布中的应用[ J ]. 灌溉排水学报, 2010, 29( 3 ): 64-68. ( ZHANG Y, SONG S B. Application of Copulas function in multi variable drought joint distribution[ J ]. Journal of Irrigation and Drainage, 2010, 29( 3 ): 64-68. ( in Chinese ) )
- [ 20 ] MIRABBASI R, FAKHERI-FARD A, DINPASHOH Y. Bivariate drought frequency analysis using the copula method[ J ]. Theoretical & Applied Climatology, 2012, 108( F2 ): 191-206. DOI: 10. 1007/ s00704-011-0524-7.
- [ 21 ] GANGULI P, REDDY M J. Risk assessment of droughts in Gujarat using bivariate Copulas[ J ]. Water Resources Management, 2012, 26( 11 ): 3301-3327. DOI: 10. 1007/ s11269-012-0073-6
- [ 22 ] SONG S, SINGH V P. Meta-elliptical copulas for drought frequency analysis of periodic hydrologic data[ J ]. Stochastic Environmental Research & Risk Assessment, 2010, 24( 3 ): 425-444. DOI: 10. 1007/ s00477-009-0331-1
- [ 23 ] SERINALDI F, BONACCORSO B, CANCELLIERE A, et al. Probabilistic characterization of drought properties through copulas[ J ]. Physics & Chemistry of the Earth Parts A/ b/ c, 2009, 34( 10 ): 596-605. DOI: 10. 1016/ j. pce. 2008. 09. 004.
- [ 24 ] SONG S, SINGH V P. Frequency analysis of droughts using the Plackett copula and parameter estimation by genetic algorithm[ J ]. Stochastic Environmental Research & Risk Assessment, 2010, 24( 5 ): 783-805. DOI: 10. 1007/ s00477-010-0364-5.
- [ 25 ] 曾智, 宋松柏, 李扬, 等. 基于 Copulas 函数的干旱特征变量联合概率分析[ J ]. 中国农村水利水电, 2011( 12 ): 86-90. ( ZENG Z, SONG S B, LI Y, et al. Joint probability analysis of drought characteristic variables based on Copulas function[ J ]. China Rural Water and Hydropower, 2011( 12 ): 86-90. ( in Chinese ) )
- [ 26 ] 宋松柏, 聂荣. 基于非对称阿基米德 Copula 的多变量水文干旱联合概率研究[ J ]. 水力发电学报, 2011, 30( 4 ): 20-29. ( SONG S B, NIE R. Based on the asymmetric Archimedean copula multivariate hydrological drought joint probability[ J ]. Journal of Hydroelectric, 2011, 30( 4 ): 20-29. ( in Chinese ) )
- [ 27 ] 于艺, 宋松柏. 非对称 Archimedean Copulas 函数在干旱分析中应用[ J ]. 人民黄河, 2011, 33( 8 ): 39-42. ( YU Y, SONG S B. Application of asymmetric Archimedean Copulas functions in drought analysis[ J ]. Yellow River, 2011, 33( 8 ): 39-42. ( in Chinese ) ) DOI: 10. 3969/ j. issn. 1000-1379. 2011. 08. 014.
- [ 28 ] 李计, 李毅, 宋松柏, 等. 基于 Copulas 函数的二维干旱变量联合分布[ J ]. 自然资源学报, 2012, 32( 1 ): 43-49. ( LI J, LI Y, SONG S B, et al. Joint distribution of two dimensional drought variables based on Copulas function[ J ]. Journal of Natural Resources, 2012, 32( 1 ): 43-49. ( in Chinese ) ) DOI: 10. 3969/ j. issn. 1000-0852. 2012. 01. 009.
- [ 29 ] 李计, 李毅, 贺缠生. 基于 Copula 函数的黑河流域干旱频率分析[ J ]. 西北农林科技大学学报( 自然科学版), 2013( 1 ): 213-220. ( LI J, LI Y, HE C S. Drought frequency analysis of Heihe River Basin Based on Copula function[ J ]. Journal of Northwest Agriculture and Forestry University( Natural Science Edition ), 2013( 1 ): 213-220. ( in Chinese ) )
- [ 30 ] 肖名忠, 张强, 陈永勤, 等. 基于三变量 Copula 函数的东江流域水文干旱频率分析[ J ]. 自然灾害学报, 2013( 2 ): 99-108. ( XIAO M Z, ZHANG Q, CHEN Y Q, et al. Based on Copula function of three variables in the Dongjiang River basin hydrological drought frequency analysis[ J ]. Journal of Natural Disasters, 2013( 2 ): 99-108. ( in Chinese ) )
- [ 31 ] 陈永勤, 孙鹏, 张强, 等. 基于 Copula 的鄱阳湖流域水文干旱频率分析[ J ]. 自然灾害学报, 2013( 1 ): 75-84. ( CHEN Y Q, SUN P, ZHANG Q, et al. Frequency analysis of hydrological drought in the Poyang Lake River Basin Based on Copula[ J ].

- Journal of Natural Disasters, 2013 (1): 75-84. (in Chinese))
- [32] 张强, 孙鹏, 白云岗, 等. 塔河流域枯水流量概率特征及成因与影响研究[J]. 地理科学, 2013, 33(4): 465-472. (ZHANG Q, SUN P, BAI Y G, et al. Probability behaviors of low flow of the Tarim River Basin possible causes and implications[J]. Scientia Geographica Sinica, 2013, 33 (4): 465-472. (in Chinese)) DOI: 10.11821/yj1999040005
- [33] 陈子燊, 刘占明, 黄强. 西江水文于旱历时与强度的遭遇概率分析[J]. 湖泊科学, 2013, 25(4): 576-582. (CHEN Z S, LIU Z M, HUANG Q. The Xijiang River hydrological drought duration and intensity of the encounter probability analysis[J]. Journal of Lake Sciences, 2013, 25 (4): 576-582. (in Chinese)) DOI: 10.3969/j.issn.1003-5427.2013.04.016.
- [34] YUSOFF F, HUFMEAN F, SUHAILA J, et al. Characterisation of drought properties with bivariate copula analysis[J]. Water Resources Management, 2013, 27 (12): 4183-4207. DOI: 10.1007/s11269-013-0402-4.
- [35] WAN Z W Z, JEMAIN A A, IBRAHIM K. Analysis of drought condition and risk in Peninsular Malaysia using Standardised Precipitation Index[J]. Theoretical & Applied Climatology, 2013, 111(3-4): 559-568. DOI: 10.1007/s00704-012-0682-2
- [36] REDDY M J, SINGH V P. Multivariate modeling of droughts using copulas and meta heuristic methods[J]. Stochastic Environmental Research & Risk Assessment, 2014, 28(3): 475-489. DOI: 10.1007/s00477-013-0766-2
- [37] 左冬冬, 侯威, 王文祥. 中国西南地区干旱 Copula 函数模型对样本量的敏感性分析[J]. 物理学报, 2015, 64(10): 28-40. (ZUO D D, HOU W, WANG W X. Sensitivity analysis of Copula function model to sample size in Southwest China[J]. Journal of Physics, 2015, 64(10): 28-40. (in Chinese)) DOI: 10.7498/aps.64.100203.
- [38] 刘晓云, 王劲松, 李耀辉, 等. 基于 Copula 函数的中国南方干旱风险特征研究[J]. 气象学报, 2015(6): 1080-1091. (LIU X Y, WANG J S, LI Y H, et al. Study on the risk characteristics of drought in South China based on Copula function[J]. Journal of Meteorology, 2015(6): 1080-1091. (in Chinese)) DOI: 10.11676/qxxb2015.084.
- [39] 潘耀林, 陈子燊. 基于 GH Copula 的韩江水文干旱联合概率分布研究[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015(1): 110-115. (PAN C L, CHEN Z S. GH copula Han River hydrological drought joint probability distribution based on[J]. Sun Yat sen University Journal (Natural Science Edition), 2015(1): 110-115. (in Chinese)) DOI: 10.1347/j.cnki.acta.smus.2015.01.022.
- [40] 崔刚, 韩曦. 基于 Copula 理论的甘肃省干旱特征分析[J]. 人民黄河, 2015(11): 77-80. (CUI G, HAN X. Copula based on Gang theory of Drought Characteristics in Gansu province [J]. Yellow River, 2015 (11): 77-80. (in Chinese)) DOI: 10.3969/j.issn.1000-1379.2015.11.021
- [41] 张静, 王海功, 倪长健, 等. 基于 Copula 函数的川西南地区连旱危险度分析[J]. 气象科技, 2015, 43(2): 302-308. (ZHANG J, WANG H G, NI C J, et al. Analysis of drought risk in Southwest Sichuan Based on Copula function[J]. Meteorological Science and Technology, 2015, 43 (2): 302-308. (in Chinese)) DOI: 10.3969/j.issn.1671-6345.2015.02.023.
- [42] 关帅, 丁波, 查悉妮, 等. 基于 Copula 函数的韩江流域旱涝组合事件概率特征研究[J]. 亚热带资源与环境学报, 2015(1): 10-17. (GUAN S, DING B, ZHANG X N, et al. Based on Copula function of Hanjiang River Basin drought and flood characteristics of composite event probability [J]. Subtropical Resources and Environment, 2015 (1): 10-17. (in Chinese)) DOI: 10.3969/j.issn.1673-7105.2015.01.003
- [43] 李天水, 王顺, 庄文化, 等. 游程理论和 Copula 函数在二维干旱变量联合分布中的应用[J]. 干旱区资源与环境, 2016(6): 77-82. (LI T S, WANG S, ZHUANG W H, et al. Run theory and Copula function in two dimensional joint distribution of drought variables in application of[J]. resources and environment in arid area, 2016 (6): 77-82. (in Chinese))
- [44] 钱龙霞, 张韧, 王红瑞, 等. 基于 Copula 函数的水资源供需风险损失模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(2): 517-527. (QIAN L X, ZHANG R, WANG H R, et al. Risk loss model of water supply and water demand based on copula function and its application[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2016, 36 (2): 517-527. (in Chinese)) DOI: 10.12011/1000-6788(2016)02-0517-11.
- [45] 任璐, 赵雪花. 基于 Copula 的汾河上游水文干旱频率分析[J]. 水力发电, 2016(2): 11-16. (REN L, ZHAO X H. The upper reaches of the Fenhe River hydrological drought frequency analysis based on Copula [J]. Hydroelectric Power, 2016 (2): 11-16. (in Chinese))
- [46] HUANG S, HUANG Q, CHANG J, et al. Copulas based drought evolution characteristics and risk evaluation in a typical arid and semi arid region[J]. Water Resources Management, 2014, 29(5): 1489-1503. DOI: 10.1007/s11269-014-0889-3.
- [47] LIU X F, WANG S X, ZHOU Y, et al. Spatial analysis of meteorological drought return periods in China using Copulas [J]. Natural Hazards, 2015, 80 (1): 1-22. DOI: 10.1007/s11069-015-1972-7.
- [48] ABDI A, HASSANZADEH Y, TALATAHARI S, et al. Parameter estimation of copula functions using an optimization based method[J]. Theoretical & Applied Climatology, 2016: 1-12. DOI: 10.1007/s00704-016-1757-2.
- [49] SALVADORI G, MICHELE C D. Multivariate real time assessment of droughts via copula based multi site Hazard Trajectories and Fans[J]. Journal of Hydrology, 2015, 526: 101-115. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2014.11.056.
- [50] VERGNI L, TODISCO F, MANNOCCHI F. Analysis of agricultural drought characteristics through a two dimensional copula[J]. Water Resources Management, 2015, 29(8): 2819-2835. DOI: 10.1007/s11269-015-0972-4.
- [51] ZHANG D D, YAN D H, LU F, et al. Copula based risk assessment of drought in Yunnan province, China[J]. Natural Hazards, 2015, 75(75): 2199-2220. DOI: 10.1007/s11069-014-1419-6.
- [52] XU K, YANG D, XU X, et al. Copula based drought frequency analysis considering the spatio-temporal variability in Southwest China[J]. Journal of Hydrology, 2015, 527: 630-640. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2015.05.030.